A Partícula Livre

Consideremos uma **partícula livre** no espaço euclidiano, ou seja, uma partícula sob a ação do campo de forças

$$\boxed{F(x, v, t) \equiv 0.}$$

Pela Segunda Lei de Newton, o movimento da partícula é descrito por

$$m\ddot{x} = 0,$$

em que a variável $x = (x_1, x_2, x_3)$ representa a posição da partícula e a constante m representa a massa (veja o texto *A Equação de Newton*). Essa equação é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= 0, \\ m\ddot{x}_2 &= 0, \\ m\ddot{x}_3 &= 0. \end{aligned}}$$

Cada uma dessas equações pode ser resolvida facilmente. Basta integrar duas vezes de 0 a t os dois lados de cada igualdade. Obtemos assim

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_2 + A_1 t, \\ x_2(t) &= B_2 + B_1 t, \\ x_3(t) &= C_2 + C_1 t, \end{aligned}$$

onde A_1, A_2, etc. são constantes. Impondo as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, obtemos a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (x_0)_1 + (v_0)_1 t, \\ x_2(t) &= (x_0)_2 + (v_0)_2 t, \\ x_3(t) &= (x_0)_3 + (v_0)_3 t. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t.}$$

Portanto, a trajetória $t \mapsto x(t)$ da partícula corresponde a uma reta no espaço. Em particular, as projeções da trajetória sobre planos X_1X_2, X_2X_3

e X_3X_1 são retas. A trajetória é unicamente determinada especificado-se a posição inicial x_0 e a velocidade inicial v_0 (note que tomamos $t_0 = 0$).

Nesse exemplo, foi possível obter uma fórmula explícita para a solução da equação diferencial. Isso nem sempre ocorre.

Na Figura 1, encontra-se um gráfico de $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ no caso em que $x_0 = (0, 0, 0)$ e $v_0 = (10, 10, 10)$.

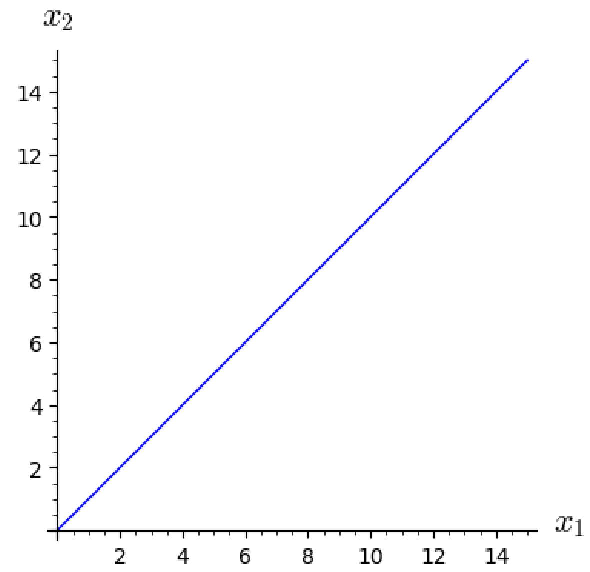

Figura 1: Gráfico de $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ para $x_0 = (0, 0, 0)$ e $v_0 = (10, 10, 10)$.