A Partícula Livre

Consideremos uma partícula livre no espaço Euclidiano, ou seja, uma partícula sob a ação do campo de forças $F(x) \equiv 0$. Pela Segunda Lei de Newton, o movimento da partícula é descrito pela equação

$$m\ddot{x} = 0,$$

onde a constante m representa a massa da partícula e a variável $x \in \mathbb{R}^3$ representa a posição da partícula (veja o texto *A Equação de Newton*).

O momento p da partícula é definido por $p = mv$, onde $v = \dot{x}$ representa a velocidade da partícula. Usando as variáveis x e p, podemos reescrever a Equação de Newton como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{m}p \\ \dot{p} &= 0. \end{aligned}$$

Essas são exatamente as equações de Hamilton associadas à Hamiltoniana

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2$$

com $(x,p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (veja o texto *As Equações de Hamilton*). Essas equações e a condição inicial

$$(x(0), p(0)) = (x_0, p_0)$$

definem um problema de valor inicial (note que tomamos $t_0 = 0$).

Integrando de 0 a t os dois lados da equação $\dot{p} = 0$ e impondo a condição inicial $p(0) = p_0$, concluímos que $p(t) = p_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, cada coordenada de p é uma constante de movimento (lembre que $H(x,p)$ ao longo de uma solução sempre é uma constante de movimento). Logo, usando a equação $\dot{x} = \frac{1}{m}p$, obtemos $\dot{x} = \frac{1}{m}p_0$. Integrando de 0 a t os dois lados dessa igualdade e impondo a condição inicial $x(0) = x_0$, obtemos $x(t) = x_0 + t\frac{1}{m}p_0$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$(x(t), p(t)) = (x_0 + t\tfrac{1}{m}p_0, p_0) = (x_0, p_0) + t(\tfrac{1}{m}p_0, 0).$$

Para cada estado inicial (x_0, p_0), a curva solução $t \mapsto (x(t), p(t))$ define uma reta no espaço de fases $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Como esperado, a energia ao longo de uma solução é constante:

$$E(t) = H(x(t), p(t)) = \frac{1}{2m}p(t)^2 = \frac{1}{2m}p_0^2 = E(x_0, p_0) = E(0).$$

Além disso, observamos que a curva solução $t \mapsto (x(t), p(t))$ está contida no subconjunto (de energia constante)

$$\mathcal{H} = \{(x,p) \mid H(x,p) = H(x_0,p_0)\} = \{(x,p) \mid p^2 = p_0^2\},$$

e também está contida no subconjunto (de momento constante)

$$\mathcal{P} = \{(x,p) \mid p = p_0\}.$$

Consideremos agora uma partícula livre em uma reta (em vez do espaço Euclidiano). Nesse caso, o sistema tem um grau de liberdade e o espaço de fase é $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. O que fizemos acima para a partícula no espaço se aplica à partícula na reta, basta substituir $\mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Em particular, a solução do problema para a partícula em uma reta é

$$(x(t), p(t)) = (x_0 + t\tfrac{1}{m}p_0, p_0) = (x_0, p_0) + t(\tfrac{1}{m}p_0, 0).$$

A curva solução $t \mapsto (x(t), p(t))$ é uma reta no plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Na Figura 1, apresentamos um esboço do retrato de fase para a partícula livre.

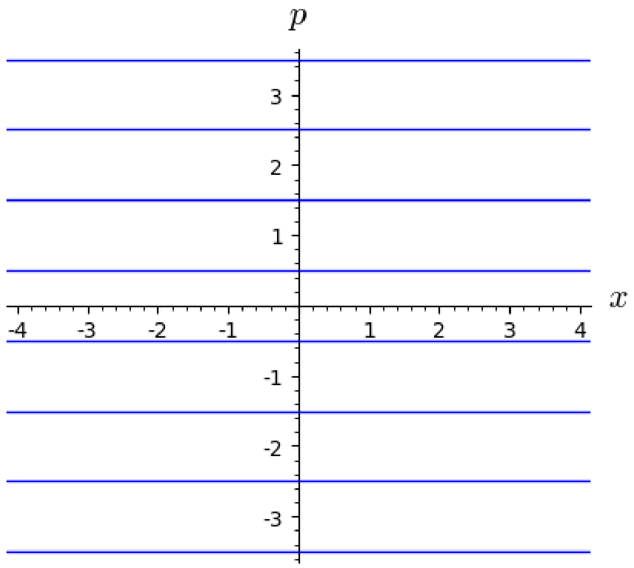

Figura 1: Retrato de fase para a partícula livre em uma reta.

Por fim, observamos que cada órbita da partícula livre em uma reta pode ser obtida usando os conjuntos $\mathcal{H}$ e $\mathcal{P}$ (definidos anteriormente). Para cada (x_0, p_0), a imagem da curva solução $t \mapsto (x(t), p(t))$ é chamada uma órbita no espaço de fase. Se $(x,p) \in \mathcal{H}$, então $x \in \mathbb{R}$ e $p = \pm p_0$. Se $(x,p) \in \mathcal{P}$, então $x \in \mathbb{R}$ e $p = p_0$. Portanto

$$\mathcal{H} \cap \mathcal{P} = \{(x,p) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } p = p_0\}.$$

Esse conjunto é exatamente a órbita (ou seja, a imagem) da curva solução $t \mapsto (x(t), p(t))$. Observamos que, todavia, o conhecimento da órbita $\mathcal{H} \cap \mathcal{P}$ não fornece a curva solução (ou seja, a parametrização) $t \mapsto (x(t), p(t))$.

Enfatizamos que a existência de constantes de movimento simplifica a análise do sistema. Em alguns casos, usa-se as constantes de movimento para reduzir o número de equações do sistema e assim torná-lo mais simples ou explicitamente solúvel. Note que foi isso que fizemos acima no caso da partícula livre.