A Queda Livre

Consideremos o problema da **queda livre**, que consiste em descrever o movimento de queda de uma partícula sobre a superfície da terra. Próximo à superfície da Terra, a força gravitacional que age sobre uma partícula de massa m é aproximadamente constante e é dada por

$$F(x, v, t) = -mgE_3,$$

onde g é uma constante positiva e $E_3 = (0, 0, 1)$. Tomamos um sistema de coordenadas $OX_1X_2X_3$ em que o eixo OX_3 é perpendicular à superfície da Terra. Nesse caso, a Equação de Newton para o movimento da partícula consiste do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= 0, \\ m\ddot{x}_2 &= 0, \\ m\ddot{x}_3 &= -mg. \end{aligned}$$

(Veja o texto *A Equação de Newton.*) Cada uma dessas equações pode ser resolvida facilmente. Basta integrar duas vezes, de 0 a t, os dois lados de cada igualdade. Obtemos assim

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_2 + A_1 t, \\ x_2(t) &= B_2 + B_1 t, \\ x_3(t) &= C_2 + C_1 t - \frac{g}{2}t^2, \end{aligned}$$

onde A_1, A_2, etc. são constantes. Impondo as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, obtemos a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (x_0)_1 + (v_0)_1 t, \\ x_2(t) &= (x_0)_2 + (v_0)_2 t, \\ x_3(t) &= (x_0)_3 + (v_0)_3 t - \frac{g}{2}t^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{g}{2}E_3 t^2.$$

Portanto, a trajetória da partícula é unicamente determinada especificado-se a posição inicial x_0 e a velocidade inicial v_0 (note que tomamos $t_0 = 0$).

Nesse exemplo, foi possível obter uma fórmula explícita para a solução da equação diferencial. Isso nem sempre ocorre.