A Queda Livre

Consideremos uma partícula de massa m em **queda livre** próxima à superfície da Terra. Nessa situação, a força gravitacional que age sob a partícula é aproximadamente constante e é dada por

$$F(x, v, t) = (0, 0, -mg)$$

com $g \approx 9.8\, m/s^2$. Tomamos um sistema de coordenadas $OX_1X_2X_3$ em que o eixo OX_3 é perpendicular à superfície da Terra. Pela Segunda Lei de Newton, o movimento da partícula é descrito pela equação

$$m\ddot{x} = (0, 0, -mg),$$

onde a variável $x = (x_1, x_2, x_3)$ representa a posição da partícula (veja o texto *A Equação de Newton*).

O momento linear $p = (p_1, p_2, p_3)$ da partícula é definido por $p = mv$ onde $v = \dot{x}$ representa a velocidade da partícula. Usando as variáveis x e p, podemos reescrever a equação de Newton como

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x} = \frac{1}{m}p \\ &\dot{p} = (0, 0, -mg). \end{aligned}}$$

Essas são exatamente as equações de Hamilton associadas à hamiltoniana

$$\boxed{H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 + mgx_3}$$

com $(x, p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (veja o texto *As Equações de Hamilton*). O campo vetorial correspondente é

$$\boxed{(x, p) \longmapsto \big((x, p), (\tfrac{1}{m}p, (0, 0, -mg))\big).}$$

As equações de Hamilton e a condição inicial

$$(x(0), p(0)) = (x_0, p_0)$$

definem um problema de valor inicial (note que tomamos $t_0 = 0$).

Integrando de 0 a t os dois lados da equação $\dot{p} = (0, 0, -mg)$ e impondo a condição inicial $p(0) = p_0$, concluímos que

$$p(t) = ((p_0)_1, (p_0)_2, (p_0)_3 - mgt) = p_0 + t(0, 0, -mg).$$

Logo, as duas primeiras coordenadas de p são constantes de movimento (lembre que $H(x, p)$ ao longo de uma solução também é uma constante de movimento). Consequentemente, usando a equação $\dot{x} = \frac{1}{m}p$, obtemos $\dot{x} = \frac{1}{m}((p_0)_1, (p_0)_2, (p_0)_3 - mgt)$. Integrando de 0 a t os dois lados dessa igualdade e impondo a condição inicial $x(0) = x_0$, segue que

$$\begin{aligned} x(t) &= \left((x_0)_1 + t\frac{1}{m}(p_0)_1, (x_0)_2 + t\frac{1}{m}(p_0)_2, (x_0)_3 + t\frac{1}{m}(p_0)_3 - t^2\frac{1}{2}g\right) \\ &= x_0 + t\frac{1}{m}p_0 - t^2\frac{1}{2}ge_3, \end{aligned}$$

onde $e_3 = (0, 0, 1)$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{aligned} (x(t), p(t)) &= \left(x_0 + t\tfrac{1}{m}p_0 - t^2\tfrac{1}{2}ge_3, p_0 - tmge_3\right) \\ &= (x_0, p_0) + t(\tfrac{1}{m}p_0, -mge_3) - t^2(\tfrac{1}{2}ge_3, 0). \end{aligned}$$

Para cada estado inicial (x_0, p_0), as projeções da curva $t \mapsto (x(t), p(t))$ sobre os planos X_1P_1 e X_2P_2 correspondem a retas e a projeção sobre o plano X_3P_3 corresponde a uma parábola. De fato, temos

$$-\frac{p_3(t) - (p_0)_3}{mg} = t \qquad \text{e} \qquad x_3(t) - (x_0)_3 = \frac{1}{m}(p_0)_3 t - \frac{1}{2}gt^2$$

e consequentemente

$$x_3(t) - (x_0)_3 = -\frac{(p_0)_3}{m^2 g}(p_3(t) - (p_0)_3) - \frac{1}{2m^2 g}(p_3(t) - (p_0)_3)^2,$$

que é a equação de uma parábola no plano X_3P_3 que passa por $((x_0)_3, (p_0)_3)$ e tem eixo OX_3. Como esperado, a energia ao longo de uma solução é constante:

$$\begin{aligned} E(t) = H(x(t), p(t)) &= \frac{1}{2m}p(t)^2 + mgx_3(t) \\ &= \frac{1}{2m}p_0^2 + mg(x_0)_3 = E(x_0, p_0) = E(0). \end{aligned}$$

Além disso, observamos que a curva solução $t \mapsto (x(t), p(t))$ está contida no subconjunto (de energia constante)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{(x, p) \mid H(x, p) = H(x_0, p_0)\} \\ &= \{(x, p) \mid \tfrac{1}{2m}p^2 + mgx_3 = \tfrac{1}{2m}p_0^2 + mg(x_0)_3\}, \end{aligned}$$

e também está contida no subconjunto (de momento constante)

$$\mathcal{P} = \{(x,p) \mid p_1 = (p_0)_1 \text{ e } p_2 = (p_0)_2\}.$$

Consideremos agora uma partícula em queda livre em uma reta (em vez do espaço euclidiano). Dito de outra forma, consideremos o sistema descrito anteriormente com $((x_0)_1,(x_0)_2) = (0,0)$ e $((p_0)_1,(p_0)_2) = (0,0)$ e nos restringemos às variáveis (x_3,p_3), que renomeamos como (x,p). Nesse caso, o sistema tem um grau de liberdade e o espaço de fases é $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. O que fizemos acima para a queda livre no espaço se aplica à queda livre em uma reta, basta substituir $\mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Em particular, a solução do problema para a queda livre em uma reta é

$$(x(t),p(t)) = (x_0+t\tfrac{1}{m}p_0-\tfrac{1}{2}gt^2, p_0-mgt) = (x_0,p_0)+t(\tfrac{1}{m}p_0,-mg)-t^2(\tfrac{1}{2}g,0).$$

A curva $t\mapsto(x(t),p(t))$ é uma parábola no plano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Na Figura 1, temos um esboço do retrato de fases para a queda livre e na Figura 2 um esboço do campo vetorial $(x,p)\mapsto((x,p),(\tfrac{1}{m}p,-mg))$ (para $m=1$).

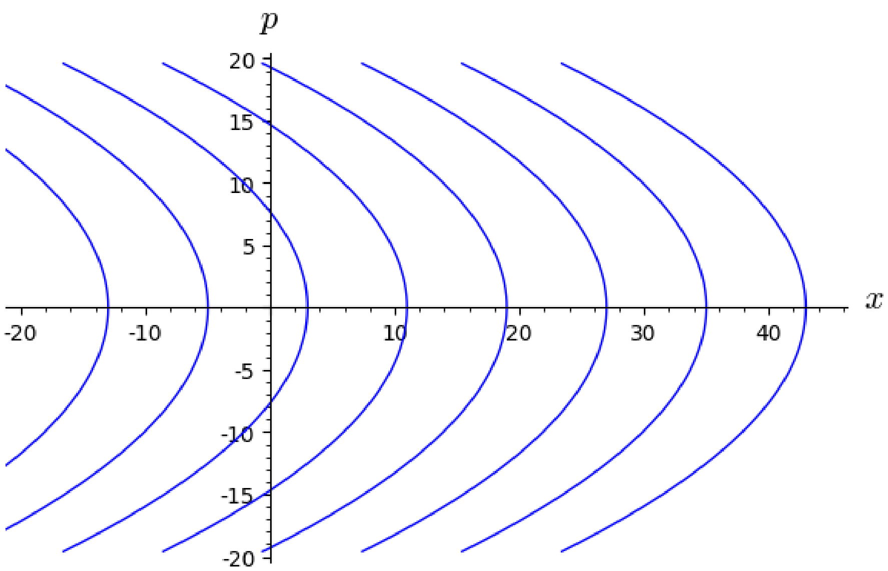

Figura 1: Retrato de fases para a queda livre em uma reta.

Por fim, observamos que cada órbita da queda livre em uma reta pode ser obtida usando o conjunto $\mathcal{H}$ de energia constante (o conjunto $\mathcal{P}$ de momento constante é vazio). Para cada (x_0,p_0), a imagem da curva $t\mapsto(x(t),p(t))$ é chamada uma órbita no espaço de fases. Se $(x,p)\in\mathcal{H}$, então $p\in\mathbb{R}$ e

$$x-x_0 = -\frac{p_0}{m^2g}(p-p_0)-\frac{1}{2m^2g}(p-p_0)^2,$$

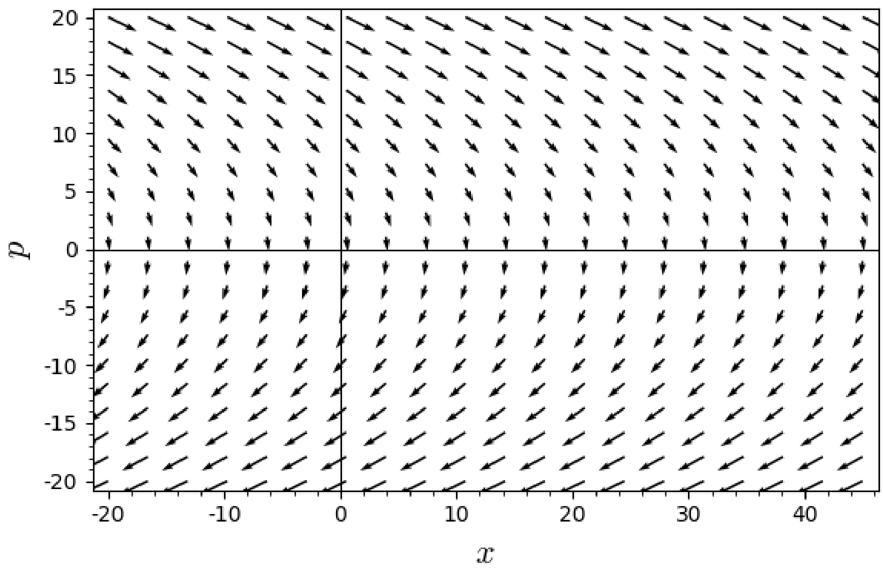

Figura 2: Campo vetorial hamiltoniano para a queda livre em uma reta.

que é a equação de uma parábola no plano XP que passa por (x_0, p_0) e tem eixo OX. Esse conjunto é exatamente a órbita (ou seja, a imagem) da curva solução $t \mapsto (x(t), p(t))$. Todavia, observamos que o conhecimento da órbita não fornece a curva solução (ou seja, a parametrização) $t \mapsto (x(t), p(t))$.

Mais uma vez, enfatizamos que a existência de constantes de movimento simplifica a análise do sistema. Em alguns casos, usa-se as constantes de movimento para reduzir o número de equações do sistema e assim torná-lo mais simples ou explicitamente solúvel. Note que foi isso que fizemos acima.