Sistemas Não-autônomos

Descrevemos a seguir sistemas hamiltonianos em que a hamiltoniana H depende do tempo.

Em um sistema hamiltoniano, o **estado** do sistema é representado por um ponto (x, p) no espaço $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, chamado **espaço de fases**. O ponto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é chamado a **posição** do sistema e o ponto $p = (p_1, \ldots, p_n)$ é chamado o **momento**. Frequentemente, usamos a notação $z = (x, p)$. O inteiro positivo n é chamado o número de **graus de liberdade** do sistema.

Uma função real $H(x, p, t)$ definida no espaço de fases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ produto cartesiano com $\mathbb{R}$ é chamada uma **hamiltoniana** (que depende do tempo). A variável $t \in \mathbb{R}$ representa o **tempo**. Por simplicidade, vamos supor que H é uma função de classe C^2 em (x, p) e de classe C^1 em t.

As equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, t) \qquad \text{e} \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, t)$$

são chamadas **equações de Hamilton** associadas à H. O sistema de $2n$ equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j}(x, p, t) \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_j}(x, p, t) \end{aligned}$$

para $j = 1, \ldots, n$ é chamado **sistema hamiltoniano** associado à H. Vamos usar "um ponto" em vez de d/dt para denotar a derivada em relação a t e "dois pontos" para denotar a segunda derivada. Escrevemos também H_x e H_p para denotar as derivadas parciais de H com respeito a x e a p, respectivamente. Logo, podemos reescrever as equações de Hamilton como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_p(x, p, t) \\ -H_x(x, p, t) \end{bmatrix},$$

ou ainda

$$\dot{z} = F_H(z, t),$$

com $F_H(z, t) = (H_p(z, t), -H_x(z, t))$.

Se a hamiltoniana H não depende do tempo, ou seja, $H = H(x, p)$, dizemos que o sistema hamiltoniano é **autônomo**. Se H depende do tempo, ou seja, $H = H(x, p, t)$, dizemos que o sistema é **não-autônomo**.

Para $t_0 \in \mathbb{R}$ e $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, um sistema hamiltoniano e a condição inicial

$$(x(t_0), p(t_0)) = (x_0, p_0)$$

definem um problema de valor inicial. O ponto (x_0, p_0) é chamado **estado inicial**. A imagem de uma solução das equações de Hamilton é chamada uma **órbita**.

Vamos supor que para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ e cada (x_0, p_0) pertencente a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ o sistema hamiltoniano possui uma única solução $t \mapsto (x(t), p(t))$ definida no intervalo $(t_0 - T, t_0 + T)$ com $T > 0$ tal que $(x(t_0), p(t_0)) = (x_0, p_0)$. Ou seja, vamos supor existência local e unicidade de soluções para o problema de valor inicial.

Associada às equações de Hamilton, para cada $t \in \mathbb{R}$ temos a função

$$(x, p) \longmapsto \left((x, p), \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x, p, t), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, t) \right) \right).$$

Essa função define um campo vetorial em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ chamado **campo vetorial hamiltoniano** (no instante t). A primeira componente da função especifica o ponto base e a segunda o vetor no ponto base.

Seja $t \mapsto z(t)$ uma curva solução das equações de Hamilton. Em cada instante t, o vetor tangente a essa curva é dado por

$$\big(z(t), \dot{z}(t)\big) = \big(z(t), F_H(z(t), t)\big).$$

Portanto, se ζ pertence à orbita da solução, então a reta tangente à orbita no ponto ζ é gerada pelo vetor $F_H(\zeta, t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$.

Em resumo, observamos os seguintes fatos:

1. A cada sistema hamiltoniano não-autônomo corresponde um campo vetorial que depende do tempo.

2. Todo vetor tangente a uma curva solução é dado por um vetor do campo vetorial em algum instante do tempo.

Esses fatos sugerem que as propriedades do campo vetorial estão relacionadas às propriedades das soluções do sistema de equações quando as soluções são vistas como curvas no espaço de fases. Essa **interpretação geométrica** é útil para o estudo de sistemas hamiltonianos. Usando esse ponto de vista, podemos obter informações qualitativas sobre as soluções sem resolver o sistema de equações. Todavia, a análise de sistemas não-autônomos é mais difícil do que a análise de sistemas autônomos pois o campo vetorial varia com o tempo.

Considere uma solução $t \mapsto z(t)$ das equações de Hamilton que passa por z_0 quando $t = 0$. É possível que essa solução passe novamente por z_0 em um instante $\tau > 0$? Se isso ocorresse, o vetor tangente à curva solução no ponto $z(0)$ no instante $t = 0$ não precisaria ser igual ao vetor tangente no ponto $z(\tau)$ no instante $t = \tau$. Portanto, é possível que a órbita seja uma curva fechada, mas também é possível que a órbita cruze a si mesma. Essa última possibilidade não pode ocorrer em sistemas autônomos.

Vejamos o que ocorre com a energia em um sistema não-autônomo. Considere as equações de Hamilton associadas à H com a condição inicial $(x(t_0), p(t_0)) = (x_0, p_0)$. Seja $t \mapsto (x(t), p(t))$ a solução desse problema. O número

$$E(t) = H(x(t), p(t), t)$$

é chamado a **energia** do sistema ao longo da solução no instante t. Em sistemas hamiltonianos não-autônomos, a energia não é conservada. Todavia, temos o seguinte resultado.

Teorema 1 (Variação da energia)**.** *Para todo t tal que a solução do sistema hamiltoniano está definida, temos*

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial t}(x(t), p(t), t).$$

Demonstração. Observamos que $t \mapsto (x(t), p(t))$ é solução das equações de Hamilton. Usando esse fato e a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E(t) \\
&= \frac{d}{dt}H(x(t), p(t), t) \\
&= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), t)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), t)\frac{dp}{dt}(t) + \frac{\partial H}{\partial t}(x(t), p(t), t) \\
&= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t))\frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t)) + \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t))\left(-\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t))\right) \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial t}(x(t), p(t), t) \\
&= \frac{\partial H}{\partial t}(x(t), p(t), t).
\end{aligned}$$

□

É possível associar a um sistema hamiltoniano não-autônomo um sistema autônomo equivalente com um número maior de graus de liberdade. Fazemos isso adicionando as variáveis t e r às variáveis x e p e definindo uma nova hamiltoniana

$$K(x, t, p, r) = H(x, p, t) + r,$$

onde $r \in \mathbb{R}$ é uma nova variável. Adicionamos a variável t à variável x e a variável r à variável p. A função K está definida no espaço de fases $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$. O sistema tem agora $n+1$ graus de liberdade e é autônomo. As equações de Hamilton associadas a K são

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \frac{\partial K}{\partial p}(x,t,p,r) = \frac{\partial H}{\partial p}(x,p,t) \\
\frac{dt}{ds} &= \frac{\partial K}{\partial r}(x,t,p,r) = 1 \\
\frac{dp}{ds} &= -\frac{\partial K}{\partial x}(x,t,p,r) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p,t) \\
\frac{dr}{ds} &= -\frac{\partial K}{\partial t}(x,t,p,r) = -\frac{\partial H}{\partial t}(x,p,t),
\end{aligned}$$

onde a variável $s \in \mathbb{R}$ representa o tempo.

O conjunto das soluções das equações de Hamilton

$$\dot{z} = F_H(z,t) \quad \text{com} \quad z \in \mathbb{R}^{2n}$$

define uma família U a 2-parâmetros chamada **família de evolução**. Mais precisamente, definimos a função $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ da seguinte forma: Seja

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

o fluxo de fase do sistema hamiltoniano associado a K (veja o texto *O Campo Vetorial, o Fluxo e a Conservação da Energia*). Então

$$s \mapsto \phi(s, x_0, t_0, p_0, r_0)$$

é a curva solução das equações associadas a K que passa por (x_0, t_0, p_0, r_0) no instante $s = 0$. Definimos

$$\begin{aligned}
&U(t_1, t_0, x_0, p_0) \\
&= (\phi^1, \ldots, \phi^n, \phi^{n+2}, \ldots, \phi^{2n+1})(t_1 - t_0, x_0, t_0, p_0, -H(x_0, p_0, t_0)),
\end{aligned}$$

onde ϕ^j denota a j-ésima função coordenada de ϕ para $j = 1, \ldots, 2n+2$. É simples verificar que $t \mapsto U(t, t_0, x_0, p_0)$ é a curva solução das equações de Hamilton associadas a H que passa por (x_0, p_0) em $t = t_0$. De fato, observamos primeiro que $s \mapsto \phi^{n+1}(s - t_0, x_0, t_0, p_0, -H(x_0, p_0, t_0))$ é a curva solução da equação $dt/ds = 1$ que passa por t_0 quando $s = t_0$. Portanto $t(s) = s$. Logo, a primeira e terceira equações do sistema associado a K se reduzem às equações de Hamilton associadas a H e $t \mapsto U(t, t_0, x_0, p_0)$ é a curva solução dessas equações que passa por (x_0, p_0) quando $t = t_0$. Também é simples verificar que $U(t_1, t_1, x_0, p_0) = (x_0, p_0)$ e

$$U(t_1, t_0, x_0, p_0) = U(t_1, s, U(s, t_0, x_0, p_0))$$

para $t_1, t_0, s \in \mathbb{R}$ e $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. Essas duas últimas propriedades implicam que U é uma **família de transformações a 2-parâmetros**.

Em resumo, a solução $t \mapsto U(t, t_0, x_0, p_0)$ do sistema não-autônomo tal que $U(t_0, t_0, x_0, p_0) = (x_0, p_0)$ forma uma família de evoluções. Além disso, essa família é obtida a partir do fluxo do sistema autônomo associado. Por outro lado, se $t \mapsto (x(t), p(t))$ é a solução do sistema não-autônomo com a condição inicial $(x(t_0), p(t_0)) = (x_0, p_0)$, então $s \mapsto (x(s), t(s), p(s), e(s))$ com $t(s) = s$ e $e(s) = -H(x(s), p(s), s)$ é a solução do sistema autônomo com a condição inicial $(x(t_0), t(t_0), p(t_0), e(t_0)) = (x_0, t_0, p_0, -H(x_0, p_0, t_0))$. Estabelecemos assim uma equivalência entre o sistema não-autônomo e o sistema autônomo associado.

Por fim, usando o teorema de conservação da energia, observamos que a energia $E(s) = W(x(s), t(s), p(s), e(s))$ do sistema autônomo associado a K ao longo da solução é constante e igual a zero:

$$\begin{aligned} E(s) = E(t_0) &= W(x_0, t_0, p_0, -H(x_0, p_0, t_0)) \\ &= H(x_0, p_0, t_0) + (-H(x_0, p_0, t_0)) = 0. \end{aligned}$$