Tipos de Soluções

Consideremos inicialmente sistemas hamiltonianos autônomos

$$\dot{z} = F_H(z) \quad \text{com} \quad z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

(Veja o texto *As Equações de Hamilton.*) A função $z \mapsto (z, F_H(z))$ define um campo vetorial no espaço de fases $\mathbb{R}^{2n}$. A imagem de uma curva solução do sistema é chamada uma órbita no espaço de fases. Quais são os tipos de órbitas possíveis em um sistema autônomo? Para indicar uma resposta a essa pergunta, vamos descrever primeiro dois tipos básicos de soluções: soluções periódicas e soluções de equilíbrio.

Se o sistema hamiltoniano possui uma órbita fechada e $t \mapsto z(t)$ é uma solução tal que $z(t_0)$ pertence à órbita para algum t_0, então segue que $z(t)$ pertence à orbita para todo $t \in \mathbb{R}$ (veja a discussão sobre cruzamento de órbitas em *O Campo Vetorial, o Fluxo e a Conservação da Energia*). Além disso, existe $T > 0$ tal que $z(t_0+T) = z(t_0)$. Mais do que isso, $t \mapsto z(t)$ é uma **solução periódica**, ou seja, $z(t + T) = z(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, seja $\phi(t, \zeta)$ o fluxo de fase do sistema autônomo. Então $\phi(0, \zeta) = \zeta$ e $t \mapsto \phi(t, \zeta)$ é uma solução que passa por ζ em $t = 0$. Se $\phi(T, \zeta) = \zeta$, ou seja, a solução retorna a ζ após um tempo T, então $\phi(t + T, \zeta) = \phi(t, \phi(T, \zeta)) = \phi(t, \zeta)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, $t \mapsto \phi(t, \zeta)$ é uma função periódica de período T. O menor número $T > 0$ com essa propriedade é chamado o **período** da **órbita periódica** que passa por ζ.

Um outro tipo básico de órbita é chamado ponto de equilíbrio. Para definir esse conceito, observamos que se $F_H(\zeta_0) = 0$ para $\zeta_0 \in \mathbb{R}^{2n}$, ou seja, ζ_0 é um **zero do campo vetorial**, então a função constante $z(t) = \zeta_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é uma solução do sistema de equações, chamada **solução de equilíbrio (ou solução estacionária)**. A órbita correspondente consiste exatamente do ponto ζ_0. Essa órbita é chamada **ponto de equilíbrio (ou ponto estacionário)**. Dito de outra forma, as soluções de equilíbrio são as soluções constantes que são zeros do campo vetorial.

Voltando a pergunta original: Quais são os tipos de órbitas possíveis em um sistema autônomo? De certa forma, já respondemos parcialmente a essa pergunta: Uma órbita pode ser um ponto, uma curva fechada simples, ou a imagem de um intervalo. Uma figura de todas as órbitas de um sistema autônomo é chamada **retrato de fases (ou diagrama de fases)**. Um problema fundamental é portanto: Dado um sistema autônomo de equações, determinar seu retrato de fases.

Visto que existem essencialmente três tipos de órbitas, pode parecer que o retrato de fases de um sistema não seria uma figura muito complicada. Todavia, a imagem de um intervalo pode ser um subconjunto complicado do espaço de fases. Além disso, a união de órbitas dos três tipos pode originar um retrato de fases extremamente rico.

Mencionamos acima alguns tipos de soluções de sistemas autônomos. Todavia, soluções de equilíbrio e soluções periódicas também podem ocorrer em sistemas não-autônomos (onde o campo vetorial varia com o tempo). Apresentamos apenas a definição de solução periódica. Considere um sistema hamiltoniano não-autônomo:

$$\dot{z} = F_H(z, t) \quad \text{com} \quad z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

(Veja o texto *Sistemas Não-autônomos.*) Seja $t \mapsto z(t)$ uma solução dessa equação. Se existe $T > 0$ tal que $z(t + T) = z(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, dizemos que a solução é **periódica**. O menor número $T > 0$ com essa propriedade é chamado o **período** da solução.