Parametrização de um Segmento

Em um eixo, sejam A e B pontos com coordenadas a e b, respectivamente. Suponha que A está à esquerda de B. Então $a < b$.

Seja X um ponto do segmento AB com coordenada x. Então $a \leq x \leq b$. Portanto, o segmento AB corresponde ao intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. (Lembramos que $[a, b] = \{s \in \mathbb{R} \mid a \leq s \leq b\}$.)

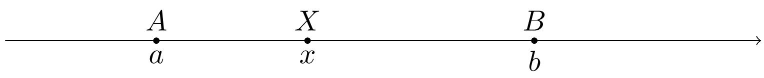

Figura 1: O segmento AB corresponde ao intervalo $[a, b]$.

Para cada ponto X do segmento AB, temos $d(A, X) \leq d(A, B)$. Logo

$$0 \leq \frac{d(A, X)}{d(A, B)} \leq 1.$$

Para cada $t \in [0, 1]$, seja X_t o ponto do segmento AB tal que

$$\frac{d(A, X_t)}{d(A, B)} = t.$$

Então a coordenada x_t do ponto X_t satisfaz

$$\frac{|a - x_t|}{|a - b|} = t,$$

que é equivalente a

$$\frac{x_t - a}{b - a} = t,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x_t &= a + t(b - a) \\ &= (1 - t)a + tb. \end{aligned}$$

Usamos acima a definição de valor absoluto e as desigualdades $a \leq x_t$ e $a \leq b$.

A função $t \mapsto x_t$ com $t \in [0, 1]$ é chamada uma **parametrização do segmento** AB. A variável t é chamada o **parâmetro**.

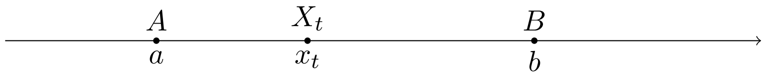

Figura 2: $d(A, X_t)/d(A, B) = (x_t - a)(b - a)$.

Valor do parâmetro t	Coordenada x_t	Ponto X_t
$t = 0$	$x_0 = a$	$X_0 = A$
$t = 1$	$x_1 = b$	$X_1 = B$
$t = 1/2$	$x_{1/2} = (a + b)/2$	$X_{1/2}$

Tabela 1: O ponto X_t para alguns valores de t.

O ponto $X_{1/2}$ é chamado o **ponto médio** do segmento AB. Portanto, se o ponto A tem coordenada a e o ponto B tem coordenada b, a coordenada do ponto médio de AB é

$$\frac{a + b}{2}.$$

Quando A é o ponto médio do segmento de reta XX', dizemos que X' é o **simétrico** de X em relação ao ponto A. Se os pontos A, X e X' têm coordenadas a, x e x', respectivamente, então $x' = 2a - x$.